

Comunicazioni con mezzi mobili A.A 2012-13

Analisi delle prestazioni di un sistema CDMA in una struttura a 7 celle esagonali in termini di potenza minima ricevuta

Giulio Marin

14 dicembre 2012

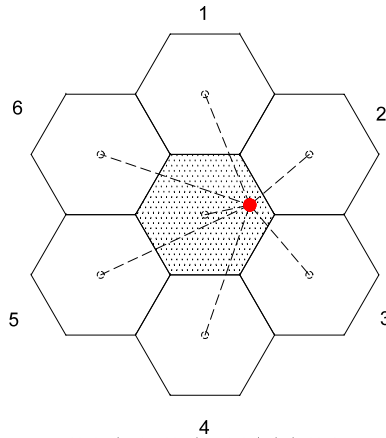


Figura 1: Schema a 7 celle esagonali

Analisi teorica

Si richiede di analizzare le prestazioni di un sistema CDMA in termini di potenza minima ricevuta da un terminale mobile (in rosso nella Figura 1) al variare del numero di utenti presenti nelle 6 celle adiacenti. Si suppone che il terminale mobile (MT) sia l'unico utente agganciato con la stazione radio base (BS) associata alla cella centrale e quindi i segnali trasmessi dalle altre celle risultano interferenti per l'utente. Si supponga inoltre che la legge di attenuazione della potenza sia la seguente:

$$P_R = P_T K_0 d^{-a} s$$

dove P_R e P_T sono la potenza ricevuta e trasmessa, K_0 una costante di attenuazione, d la distanza tra MT e BS, a il parametro di attenuazione e s la variabile aleatoria che tiene conto dell'effetto dello shadowing. Dal momento che $s_{dB} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{s_{dB}}^2)$, utilizzando le relazioni in Appendice A.2 si ottiene $s \sim \text{Log} - \mathcal{N}(0, k^2 \sigma_{s_{dB}}^2)$.

Fissata una configurazione¹, per permettere il normale funzionamento del dispositivo, il rapporto segnale-interferenza più rumore deve risultare maggiore di una soglia prefissata. Questo vincolo si riduce a garantire una potenza minima P_{Rmin} ricevuta dal terminale e per raggiungere tale obiettivo si utilizza un controllo di potenza su ogni utente.

La potenza trasmessa da una BS per garantire P_{Rmin} a un utente che dista r metri è

$$P_T(r) = P_{Rmin} K_0^{-1} r^a s^{-1} \Rightarrow (P_T(r))_{dB} = 10 \log_{10}(P_{Rmin} K_0^{-1}) + 10a \log_{10} r - s_{dB}$$

Poiché dal punto di vista statistico $-s_{dB}$ equivale a $+s_{dB}$, nelle analisi seguenti si utilizzerà il segno positivo.

Se non si conosce l'esatta posizione dell'utente è necessario considerare la potenza trasmessa mediata sull'area della cella²

¹Dipendente dal tipo di servizio, modulazione, codifica, ecc.

²La cella è stata approssimata con il cerchio di raggio R che circonda l'esagono

$$\bar{P}_T = \mathbb{E}_r[P_T(r)] = \int_0^R P_{Rmin} K_0^{-1} r^a s^{-1} \frac{2r}{R^2} dr = \frac{2}{a+2} K_0^{-1} P_{Rmin} R^a s$$

dove $2r/R^2 dr$ è la densità di probabilità che un utente disti r dalla BS. Per la proprietà (3) si ottiene $P_T \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\ln \alpha, k^2 \sigma_{s_{dB}})$, dove si è posto $\alpha \triangleq 2/(a+2)K_0^{-1}P_{Rmin}R^a$.

I contributi di N_u utenti all'interno della cella si possono supporre indipendenti, quindi la potenza totale media trasmessa da una BS è

$$\bar{P}_{T_i} = \frac{2}{a+2} K_0^{-1} P_{Rmin} R^a \sum_{j=1}^{N_u} s_j$$

La somma di N_u variabili log-normali s_j è ancora una variabile log-normale e chiamando S tale somma, da (6) si ottiene $\mathbb{E}[S] = N_u \mathbb{E}[s]$ e $\text{var}(S) = N_u \text{var}(s)$. Sfruttando le relazioni (2) si ottengono i parametri della variabile $S \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$ e grazie a (3) si ottiene

$$\bar{P}_{T_i} \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_S + \ln \alpha, \sigma_S^2).$$

Il terminale mobile, posto a una distanza d_i dalla BS i , riceve quindi una potenza interferente

$$P_{I_i} = \bar{P}_{T_i} K_0 d_i^{-a} s_i \frac{1}{G} = \frac{2}{a+2} \frac{P_{Rmin}}{G} R^a d_i^{-a} \left(\sum_{j=1}^{N_u} s_j \right) s_i$$

dove il termine G tiene conto del guadagno di processo in questo tipo di sistema. Se espressa in dB tale potenza diventa

$$(P_{I_i})_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{2}{a+2} \frac{P_{Rmin}}{G} R^a d_i^{-a} \right) + 10 \log_{10} \left(\sum_{j=1}^{N_u} s_j \right) + 10 \log_{10} (s_i)$$

e ponendo $\beta \triangleq 2/(a+2)P_{Rmin}R^a/G$, dall'Appendice A si ottiene

$$(P_{I_i})_{dB} \sim \mathcal{N}((\beta d_i^{-a})_{dB} + \mu_S/k, \sigma_S^2/k^2 + \sigma_{s_{dB}}^2).$$

Noti i parametri di $(P_{I_i})_{dB}$ si ricava

$$P_{I_i} \sim \text{Log} - \mathcal{N}(k(\beta d_i^{-a})_{dB} + \mu_S, \sigma_S^2 + k^2 \sigma_{s_{dB}}^2).$$

La potenza interferente totale dovuta alla potenza trasmessa dalle 6 celle adiacenti è

$$P_I = \sum_{i=1}^6 P_{I_i} = \frac{2}{a+2} \frac{P_{Rmin}}{G} R^a \left[\sum_{i=1}^6 d_i^{-a} \left(\sum_{j=1}^{N_u} s_j \right) s_i \right] = \beta \sum_{i=1}^6 x_i$$

dove $x_i = d_i^{-a} S_i s_i$ quindi $(x_i)_{dB} = -a(d_i)_{dB} + (S_i)_{dB} + (s_i)_{dB}$. Da questa relazione si ricava

$$(x_i)_{dB} \sim \mathcal{N}(-a(d_i)_{dB} + \mu_S/k, \sigma_S^2/k^2 + \sigma_{s_{dB}}^2)$$

e di conseguenza

$$x_i \sim \text{Log} - \mathcal{N}(-ka(d_i)_{dB} + \mu_S, \sigma_S^2 + k^2 \sigma_{s_{dB}}^2).$$

Nota la statistica di x_i è possibile ricavare quella di $X = \sum_{i=1}^6 x_i$ da (6) e (1)

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^6 \mathbb{E}[x_j] \\ \text{var}(X) = \sum_{j=1}^6 \text{var}(x_j) \end{cases}$$

e quella di P_I da (2) e (3) ottenendo

$$P_I \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_X + \ln \beta, \sigma_X^2)$$

Grazie al guadagno di processo del sistema CDMA, la potenza del rumore è

$$P_N = \frac{N_0}{2} \mathcal{B} = k_B T_{eff} \frac{B}{G}$$

Il rapporto segnale rumore più interferenza è

$$SINR = \frac{P_{Rmin}}{P_I + P_N}$$

Vogliamo che

$$P[SINR < SINR_{min}] = P\left[\frac{P_{Rmin}}{P_I + P_N} < SINR_{min}\right] = P\left[P_I \geq \frac{P_{Rmin}}{SINR_{min}} - P_N\right] \leq \varepsilon$$

quindi applicando il logaritmo (funzione strettamente monotona crescente) si ottiene

$$P\left[\ln P_I \geq \ln\left(\frac{P_{Rmin}}{SINR_{min}} - P_N\right)\right] \leq \varepsilon$$

Se $\Phi(x) = P[\ln P_I \leq x]$ è la funzione di ripartizione di $\ln P_I$ che è una variabile aleatoria normale con media $\mu_X + \ln \beta$ e varianza σ_X^2 , allora dobbiamo trovare un valore di P_{Rmin} tale che

$$1 - \Phi\left(\ln\left(\frac{P_{Rmin}}{SINR_{min}} - P_N\right)\right) \leq \varepsilon$$

Si noti che anche $\Phi(x)$ dipende da P_{Rmin} , quindi tale valore potrà essere trovato solamente tramite simulazione.

Implementazione del simulatore

Per implementare l'analisi precedente è stata realizzata un'interfaccia grafica che permette di modificare rapidamente tutti i parametri coinvolti e di visualizzare i risultati in grafici opportuni. In Figura 2 è riportato uno screenshot dell'applicazione.

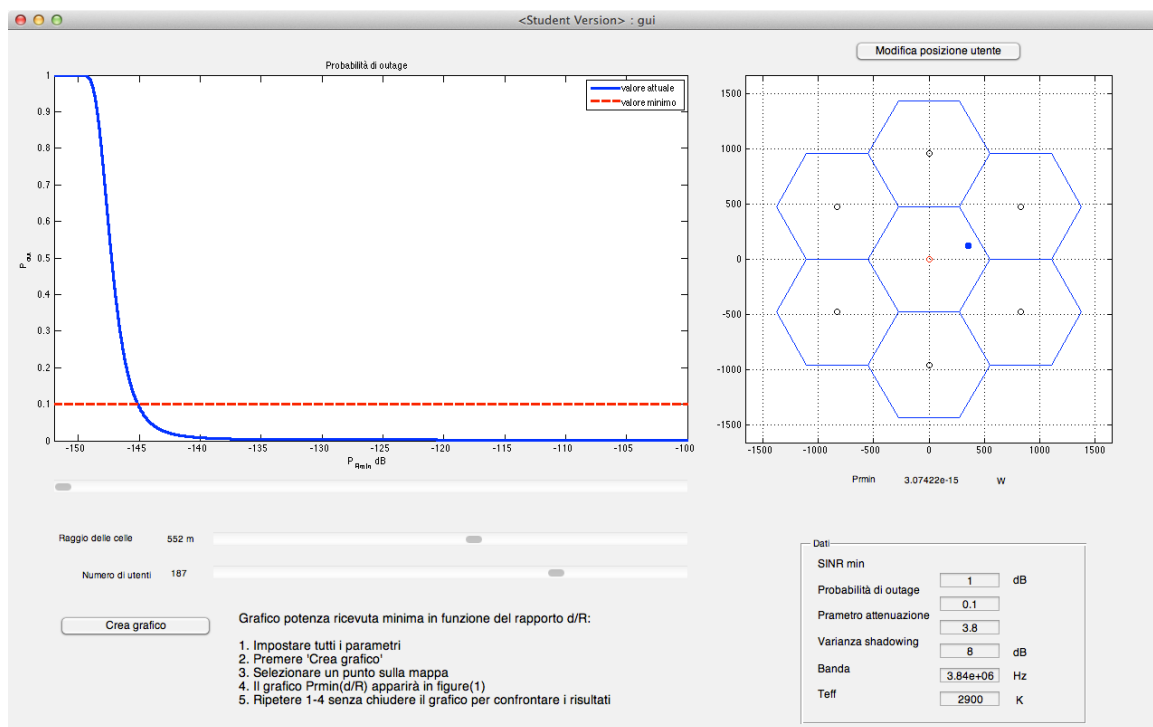
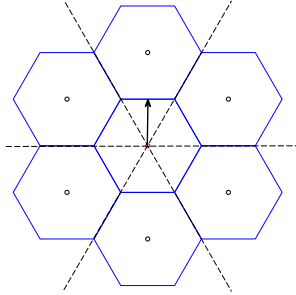


Figura 2: Screenshot interfaccia grafica

Il guadagno di processo G è stato fissato a 256, quindi il numero massimo di utenti per cella, per semplicità uguale per tutte e 6 le celle, va da 0 a 256. Tale limite nella realtà potrebbe essere superato, tuttavia nell'analisi si dovrebbe tenere conto anche di una ulteriore interferenza causata dalla stazione base stessa.

All'avvio del programma vengono riportati i parametri di uno scenario tipico. Modificando i dati si aggiornano automaticamente anche i grafici e se esiste un valore di potenza minima che garantisce una probabilità di outage inferiore al limite imposto, tale valore viene visualizzato sull'interfaccia. Oltre ai valori numerici è possibile modificare la posizione dell'utente premendo il pulsante relativo.

Per confrontare le diverse performance al variare del numero di utenti nelle celle adiacenti è sufficiente premere il pulsante *Crea grafico*. Dopo aver selezionato nella mappa un punto, che serve solamente per indicare la direzione da analizzare, viene creato un grafico che rappresenta la potenza minima da garantire al ricevitore in funzione del rapporto d/R , dove d è la distanza dell'utente dalla BS e R è il raggio della cella. Modificando qualche parametro e ripetendo l'operazione descritta il grafico si aggiorna, aggiungendo la nuova configurazione, permettendo così un confronto visivo diretto.



Come si nota nella figura a lato, esiste una certa simmetria nel sistema, quindi è sufficiente valutare le performance al variare della posizione dell'utente all'interno di uno dei sei settori triangolari separati dalle linee tratteggiate. Dalle simulazioni risulta che il caso peggiore è rappresentato dalla direzione indicata in figura con una freccia. A differenza di quanto si può pensare infatti, le prestazioni peggiorano se il dispositivo è più vicino a un lato del bordo cella, rappresentato dall'esagono, piuttosto che a un vertice, anche se il vertice è più distante dalla BS centrale.

In Figura 3 è riportato un esempio di confronto delle prestazioni lungo la direzione critica per quattro diversi valori del numero di utenti, mentre in Tabella 1 sono stati riportati i parametri utilizzati.

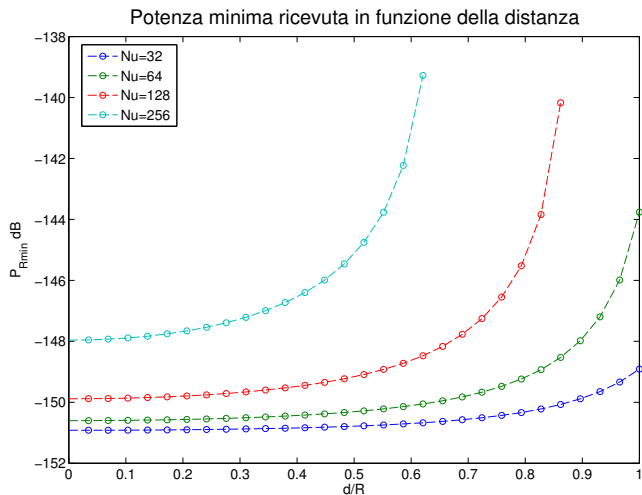


Figura 3: Confronto di prestazioni

Il grafico conferma le analisi teoriche. A parità di distanza, all'aumentare del numero di utenti nelle celle adiacenti aumenta anche la potenza trasmessa dalle BS adiacenti e di conseguenza anche l'interferenza vista dal terminale. Per garantire una probabilità di outage minima ad un dato rapporto segnale rumore più interferenza è quindi necessario garantire una potenza utile minima ricevuta più elevata. A parità di potenza utile minima invece si nota che all'aumentare del numero di utenti nelle celle adiacenti, diminuisce la distanza entro la quale è possibile garantire una probabilità di outage minima agli utenti.

Si fa notare che lungo certe direzioni, per valori del rapporto d/R prossimi a uno, l'utente in realtà non si trova più nella cella di competenza della BS centrale poiché l'esagono è inscritto nel cerchio di raggio R .

In tutti i casi rappresentati, la potenza minima non scende mai sotto la soglia di -151 dB. All'aumentare del numero di utenti invece la potenza minima aumenta esponenzialmente ed emerge un valore critico di d/R oltre al quale non si può più garantire la soglia minima di rapporto segnale rumore più interferenza impostata.

Se il numero di utenti nelle celle adiacenti è zero, la potenza interferente è nulla e la potenza minima ricevuta si ricava dalla relazione

$$SINR_{min} = \frac{P_{Rmin}}{P_N} \Rightarrow P_{Rmin} = SINR_{min} P_N = -151 \text{ dB}$$

che spiega il lower bound precedentemente trovato per ispezione.

Parametro di attenuazione	$a = 3.8$
Banda	$B = 3.84 \text{ MHz}$
Temperatura efficace	$T_{eff} = 2900 \text{ K}$
Varianza dello shadowing	$\sigma_{s_{dB}}^2 = 8 \text{ dB}$
SINR minimo	$SINR_{min_{dB}} = 1 \text{ dB}$
Probabilità di outage	$\varepsilon = 0.1$

Tabella 1: Parametri utilizzati

Esempio numerico

Si riporta un esempio numerico considerando che l'utente da servire si trovi al centro della cella.

Numero utenti	40
Guadagno di processo	256
SINRmin	1 dB
Probabilità di outage	0.1
Coefficiente di attenuazione	3.8
Deviazione standard shadowing	6 dB
Banda	3.84 MHz
Temperatura efficace	2900 K

Tabella 2: Dati

		dB	lineare
Shadowing singolo utente	media	0	2.597
	varianza	36	38.7
Shadowing N_u utenti	media	19.9	104
	varianza	2.53	1.55e+03
Potenza trasmessa per utente	media	-78.3	3.88e-08
	varianza	36	8.65e-15
Potenza trasmessa per cella	media	-58.4	2.6
	varianza	2.53	7.423e-04
Potenza interferente per cella	media	-165	8.78e-17
	varianza	38.5	5.17e-32
Potenza interferente totale	media	-154	5.27e-16
	varianza	14.2	3.1e-31
Potenza minima ricevuta		-147	1.948e-15

Tabella 3: Risultati

A Appunti su variabili aleatorie log-normali

A.1 Media e varianza

Sia $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, allora $y = e^x \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$. Si fa notare che nella notazione classica della variabile log-normale, media e varianza all'interno delle parentesi sono quelle della variabile normale associata.

Media $E[y]$ e varianza $\text{var}(y)$ della variabile log-normale y possono essere ricavate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E[y] = e^{\mu_x + \sigma_x^2/2} \\ \text{var}(y) = E[y]^2 (e^{\sigma_x^2} - 1) \end{cases} \quad (1)$$

Viceversa sia $x \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, allora $y = \ln x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$. Posto $E[x]$ e $\text{var}(x)$ rispettivamente media e varianza della variabile log-normale x , si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mu_x = \ln E[x] - \sigma_x^2/2 \\ \sigma_x^2 = \ln(1 + \text{var}(x)/E[x]^2) \end{cases} \quad (2)$$

Posto ancora $x \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, si ritiene utile riportare alcune proprietà delle variabili log-normali:

$$ax \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_x + \ln a, \sigma_x^2) \quad (3)$$

$$x^a \sim \text{Log} - \mathcal{N}(a\mu_x, a^2\sigma_x^2) \quad (4)$$

$$x + c \sim \text{Log} - \mathcal{N} \text{ traslata con media } E[x] + c \text{ e varianza } \text{var}(x) \quad (5)$$

Vale inoltre il seguente risultato: siano $x_j \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ variabili indipendenti log-normali, allora $y = \sum_{j=1}^n x_j$ è approssimabile con una variabile log-normale avente media e varianza

$$\begin{cases} E[y] = \sum_{j=1}^n E[x_j] \\ \text{var}(y) = \sum_{j=1}^n \text{var}(x_j) \end{cases} \quad (6)$$

A.2 Conversioni di potenza

Operando con le potenze spesso è conveniente esprimerle in decibel, nasce quindi l'esigenza di convertire la statistica lineare in termini logaritmici. Per semplicità di notazione si è posto $k \triangleq \ln 10/10$.

- Sia y la variabile che esprime x in dB

$$y = 10 \log_{10} x = \frac{10}{\ln 10} \ln x = \frac{1}{k} \ln x$$

Se $x \sim \text{Log} - \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, per le proprietà dell'aspettazione si ottiene $y \sim \mathcal{N}(\mu_x/k, \sigma_x^2/k^2)$.

- Viceversa sia x la variabile che esprime y in termini lineari

$$x = 10^{\frac{y}{10}} = e^{\frac{\ln 10}{10} y} = e^{ky}$$

Se $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ allora $ky \sim \mathcal{N}(k\mu_y, k^2\sigma_y^2)$, quindi $x \sim \text{Log} - \mathcal{N}(k\mu_y, k^2\sigma_y^2)$.